Multiple zeta values and zeta Mahler measures (Analytic Number Theory : related Multiple aspects of Arithmetic Functions)

佐々木, 義卓

数理解析研究所講究録
第 1806 巻 2012 年 37-41

Multiple zeta values and zeta Mahler measures

近畿大学大学院総合理工学研究科*1 佐々木 義卓 (Yoshitaka Sasaki)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering
Kinki University

1 序 ～高次 Mahler 測度とその母関数～

Mahler 測度は L 関数の特殊値との関係や多様体の体積としての解釈, 周期的解釈, エントロピーとしての解釈など多くの分野と関係する非常に興味深い研究対象である. 高次 Mahler 測度は, その拡張として, 近年黒川・Lalín・落合 [3] によって導入されたものであり, Laurent 多項式 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]\backslash\{0\}$ に対して,

$$\mathrm{m}(f_1, \ldots, f_k) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{l=1}^{k} \log |f_l(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})|\, dt_n \cdots dt_1$$

で定義される. 特に, $f_1 = \cdots = f_k = f$ のとき, $\mathrm{m}_k(f) := \mathrm{m}(\underbrace{f, \ldots, f}_{k})$ と表し, k-高次 Mahler 測度と呼ぶ. $k=1$ の場合が従来の Mahler 測度である.

ゼータ Mahler 測度は高次 Mahler 測度の母関数であり, 次で定義される:

$$(1.1) \qquad Z(s_1, \ldots, s_k; f_1, \ldots, f_k) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{l=1}^{k} |f_l(e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})|^{s_l}\, dt_n \cdots dt_1.$$

ここで, $f_1, \ldots, f_k$ は上記と同様である. ゼータ Mahler 測度は, 赤塚 [1] によってまず $k=1$ の場合が導入され, その後, 黒川・Lalín・落合 [3] により, (1.1) の多変数の型に拡張された.

高次 Mahler 測度 (Mahler 測度も含む) の研究において最も基本的な問題は, インプットの多項式に対して, アウトプットの高次 Mahler 測度がどのような情報を持つかが一般には分からないことである. すなわち, 高次 Mahler 測度はブラックボックスであって, そのブラックボックスの中身を詳しく理解することや, よいアウトプット (高次 Mahler 測度) を与えるインプット (多項式) の選定方法を構築することが望まれる.

本稿では, 後者の問題に高次 Mahler 測度の母関数であるゼータ Mahler 測度を応用して取り組んだ研究を紹介する. まず次節では, 本研究のきっかけとなった赤塚と黒川・Lalín・

*1 2012 年 4 月より大阪体育大学体育学部所属

落合による研究結果について述べる. 第 3 節では, 多重ゼータ値, 多重ゼータ星値の定義とその諸性質について簡潔に述べる. 第 4 節では, ゼータ Mahler 測度を援用することで得られる多重ゼータ値および多重ゼータ星値と高次 Mahler 測度との新しい関係について述べる.

2 着想 ～母関数間の関係～

ここでは, 本研究の着想を得るきっかけとなった 2 つの定理を述べる. まず 1 つは, あるゼータ Mahler 測度の明示公式についてであり, 赤塚と黒川・Lalín・落合によってそれぞれ独立に与えられた*2:

定理 2.1 (赤塚 [1], 黒川・Lalín・落合 [3])

$$Z(s; X-1) = \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)^2} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\\ 1+s\end{matrix}; 1\right),$$

ここで ${}_2F_1(\substack{a,b\\c}; z)$ は Gauss の超幾何関数である.

この結果自体とても興味深いものであるが, 次の結果と照らし合わせたとき, 我々は驚嘆すべき奇跡的現象を目の当たりにすることになる:

定理 2.2 (大野・Zagier [4])

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\\ 1+s\end{matrix}; 1\right) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,n)} 4^{-\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})s^k,$$

ここで $\zeta(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値であり, $I_0(k,n,s)$ と合わせて次節で定義する.

すなわち, 多項式 $X-1$ のゼータ Mahler 測度と多重ゼータ値の母関数は等しく, それゆえ, 高次 Mahler 測度と多重ゼータ値という全く出所の違うもの同士が結びつく興味深い現象が起こっているのである. 詳しく書くと,

$$\mathrm{m}_k(X-1) = (-1)^k k! \sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,n)} 4^{-\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k})$$

が成り立つのである*3.

上記の結果から, 筆者は母関数を用いた研究の有効性を感じてならない. 前節でも述べたように, 高次 Mahler 測度はブラックボックスであって, アウトプット以外からその数学的意味・性質を伺い知ることは一般に難しい. そこで発想を逆転させるのである. すなわち,

*2 赤塚 [1] は, より一般の $Z(s, X+a)$ $(a\in\mathbb{C})$ を計算している.

*3 黒川・Lalín・落合 [3] は直接 $\mathrm{m}_k(X-1)$ を計算し, 同様の結果を得ている.

『良い性質をもつもの (例えば, ゼータ関数, L 関数の特殊値や多様体の体積など) の母関数からスタートして, その母関数とゼータ Mahler 測度の関係を見れば, 良い性質をもつ高次 Mahler 測度およびそのインプットにあてられる多項式を容易に理解できるのではなかろうか？』と思う訳である. この方法は得られる高次 Mahler 測度の性質は最初から分かっているし, インプットの多項式はスタート地点の母関数に応じて自然に定まるので, 我々の問題をすべて解決する方法と言えよう.

第 4 節では, 実際にこの研究方法を用いて得た多重ゼータ (星) 値と高次 Mahler 測度の新たな関係について述べる.

3 多重ゼータ値, 多重ゼータ星値

ここでは, 前節でも述べた多重ゼータ値および多重ゼータ星値について簡単に解説する. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して, その重さ, 深さ, 高さをそれぞれ $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^{n} k_j$, $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n$, $\mathrm{ht}(\mathbf{k}) = \#\{i \mid k_i > 1\}$ で定義する. $k_1 > 1$ のインデックス $\mathbf{k}$ を admissible と呼び,

$$I_0(k,n,s) := \{\mathbf{k}\text{:adm.} \mid \mathrm{wt}(\mathbf{k}) = k, \mathrm{dep}(\mathbf{k}) = n, \mathrm{ht}(\mathbf{k}) = s\}$$

とする. admissible なインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ に対して, 多重ゼータ値および多重ゼータ星値は次で定義される:

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_n) := \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}},$$

$$\zeta^\star(\mathbf{k}) = \zeta^\star(k_1, \dots, k_n) := \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

多重ゼータ値および多重ゼータ星値の研究で, 母関数を利用する方法はしばしば用いられる. ここでは, 以下のように重さ, 深さ, 高さの情報をパラメーターとして持つ母関数について述べる.

定理 3.1 (大野・Zagier [4])

$$\sum_{k,n,s \geq 0} \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)} \zeta(\mathbf{k}) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{s-1} = \frac{1}{xy - z} \left(1 - {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha - x, \beta - x \\ 1 - x\end{matrix}; 1\right)\right),$$

ただし, α, β は $\alpha + \beta = x + y$, $\alpha\beta = z$ を満たすとする.

定理 3.2 (青木・昆布・大野 [2])

$$\sum_{k,n,s \geq 0} \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k,n,s)} \zeta^\star(\mathbf{k}) x^{k-n-s} y^{n-s} z^{2s-2} = \frac{1}{(1-x)(1-y) - z^2} {}_3F_2\left(\begin{matrix}1 - x, 1, 1 \\ 2 - \alpha, 2 - \beta\end{matrix}; 1\right),$$

ただし, α,β は $\alpha+\beta=x+y$, $\alpha\beta=xy-z^2$ を満たすものであり, ${}_3F_2({a,b,c, \atop d,e};z)$ は一般超幾何関数である.

注意 3.3 前節の定理 2.2 は, 定理 3.1 の特別な場合である.

4 多重ゼータ星値と高次 Mahler 測度

最後に多重ゼータ星値と高次 Mahler 測度の関係について述べる. 前節の定理 3.2 において, $x\to -x$, $y\to 0$, $z\to -ix/2$ と特殊化すると,

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,n)}(-4)^{-\operatorname{dep}(\mathbf{k})}\zeta^\star(\mathbf{k})\right)x^k=1-\frac{1}{Z(x;X-1)}$$

を得る. したがって, これより次が容易に分かる:

定理 4.1 (佐々木 [5]) $k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし, $Q=X-1$ とする. そのとき次が成り立つ:

$$D_k(Q)=(-1)^k k!\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,n,n)}(-4)^{-\operatorname{dep}(\mathbf{k})}\zeta^\star(\mathbf{k}),$$

ここで $D_k(Q)$ は次で与えられる:

$$D_0(Q)=1,\quad D_k(Q)=-\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{m}_j(Q)D_{k-j}(Q)\quad (k\geq 1).$$

例 4.2

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_2(Q)&=\frac{\zeta(2)}{2},\\
\mathrm{m}_3(Q)&=-\frac{3\zeta(3)}{2},\\
\mathrm{m}_4(Q)-6\,\mathrm{m}_2(Q)^2&=6\left(\zeta(4)-\frac{\zeta^\star(2,2)}{4}\right),\\
\mathrm{m}_5(Q)-20\,\mathrm{m}_2(Q)\,\mathrm{m}_3(Q)&=-30\left(\zeta(5)-\frac{\zeta^\star(2,3)+\zeta^\star(3,2)}{4}\right).
\end{aligned}$$

これ以外にも, $\zeta(\{3,1\}_n)=\zeta(\underbrace{3,1,\ldots,3,1}_{2n})$ と高次 Mahler 測度 $\mathrm{m}_j((X-1)/(X+1))$ の関係なども, 母関数間の関係から見ることができる. 詳細は [5] を参照されたい.

謝辞

今回, 講演の機会を与えて下さった研究代表者である野田工先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] H. Akatsuka, *Zeta Mahler measures*, J. Number Theory **129** (2009), 2713–2734.

[2] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, *A generating function for sums of multiple zeta values and its applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 387–395.

[3] N. Kurokawa, M. Lalín and H. Ochiai, *Higher Mahler measures and zeta functions*, Acta Arith. **135** (2008), 269–297.

[4] Y. Ohno and D. Zagier, *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math. **12** (2001), 483–487.

[5] Y. Sasaki, *Multiple zeta values and Zeta Mahler measures*, submitted.